

On Electromagnetic Force Density Induced in Dipole Model of Materials

Hong-Soon Choi*

Department of Electrical Eng., Kyungpook National University, Daegu 41566, Korea

(Received 18 December 2017, Received in final form 11 January 2018, Accepted 12 January 2018)

In this paper, the implications of implementing a dielectric or magnetic body with a dipole model are discussed. The concept of bound charge canceled inside is basically a bound charge projected onto the surface, and the force on it can not be regarded as the density of the electromagnetic force. Projected bound charge is only effective when affecting the field outside the material and calculating the total electromagnetic force. It is shown that the introduction of virtual air-gap along with the projected bound charge can calculate the electromagnetic volumetric density.

Keywords : dipole model, bound charge, electromagnetic force, body force density, virtual air-gap

쌍극자 모델의 매질에 미치는 전자기력에 관한 연구

최홍순*

경북대학교 전기공학과, 대구시 북구 대학로 80, 41566

(2017년 12월 18일 받음, 2018년 1월 11일 최종수정본 받음, 2018년 1월 12일 게재확정)

유전체나 자성체를 쌍극자 모델로 구현할 때의 의미에 대해 고찰한다. 내부에서 상쇄되는 속박전하의 개념은 기본적으로 표면으로 투사된 속박전하이며, 그에 미치는 힘은 전자기력밀도로 간주할 수 없음을 보인다. 매질 표면에 분포하는 것으로 묘사되는 투사속박전하는 매질 외부의 필드에 영향을 주고 전체전자기력을 계산할 때만 유효하다. 투사속박전하와 더불어 가상공극을 도입하면 전자기 체적력밀도를 계산할 수 있음을 보인다.

주제어 : 쌍극자 모델, 속박전하, 전자기력, 체적력밀도, 가상공극

I. 서 론

전자장이 존재하는 곳에 놓인 매질을 묘사할 때, 전장과 자장에서 각각 등가적인 쌍극자형태의 속박전하 bound charge와 속박자하 bound magnetic charge를 도입하여 매질과 그 주변에서의 현상 등을 설명한다[1, 2]. 자유로운 움직임을 갖는 자유전하에 비하여 속박전하는 쌍극자내에서만 움직일 수 있는 개념이다. 이렇게 속박전하로 모델링된 매질은 주변의 필드를 강화하거나 자체가 받는 힘을 계산하는 것에 사용한다. 이러한 속박전하 모델링은 전기기기에서 발생하는 힘이나 토크를 산출할 때 맥스웰 응력법 Maxwell stress tensor method, 가상일법 Virtual work principle 등과 더불어 많이 사용하는 방법이다. 그러나 속박전하 개념을 응용함에 있어

개념적으로 주의를 요하게 되는 데, 본 논문에서는 그러한 부분을 분명히 구분하고 이것을 사용한 전자기력 밀도를 계산할 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

이러한 분극(전장에서 polarization, 자장에서 magnetization) 모델링을 통해 매질 주변의 필드에 미치는 영향은 이미 잘 설명되고 있으나, 속박전하가 받는 전자기력분포의 물리적 의미는 해석에 주의를 요한다. 본 논문에서는 매질내부의 속박전하가 상쇄되고 매질 표면에만 남은 속박전하의 단극에 미치는 힘이 매질내의 전자기력밀도가 될 수 없음을 보이고자 한다. 표면에만 남은 단극에 미치는 전자기력은 가상의 힘에 불과하며 전자기력 밀도의 후보가 될 수 없다는 것이다. 그러나 단극에 의한 매질외부로의 필드 영향은 유효하다. 전자기력 계산시에는 단극이 아닌 쌍극을 함께 고려하는 접근이 올바른 것임을 보인다. 매질 전체의 힘을 구할 때는 표면으로 투사된 단극에 미치는 전자기력을 전체면적에 대해 적분한 것은 여전히 유의미하다. 본 논문에서는 매질내에서 상쇄

되기 전의 쌍극자에 미치는 힘이 체적력 밀도의 의미를 지니고 있음을 보인다. 매질 외부의 필드의 계산에는, 매질내의 쌍극전하가 모두 존재하는 것으로 보는 관점과 내부에서 쌍극자간 경계에서 상쇄 후 단극전하분포만 남은 것으로 보는 것 간에 최종 필드의 계산 결과에는 상관이 없다.

수많은 쌍극자가 뭉쳐져서 매질을 형성하는 데, 이에 미치는 힘은 각 쌍극자 덩어리에 미치는 힘의 합으로 보는 것이 자연스럽다. 보통 쌍극자는 원자(또는 분자)로 생각해 볼 수 있는데, 쌍극자중 한쪽의 단극에 미치는 힘은 전자기장에서 바라 본 연속체 매질에 미치는 힘이 아니며 단지 원자내의 반쪽에 미치는 힘을 뜻한다. 특정 체적을 가지는 연속체 매질은 그 체적안에 반드시 정수개의 쌍극자를 가져야 하며, 정수가 아닌 실수값 개수를 가질 수 없음은 자명하다.

속박전하의 개념정립과 그 논란에 대해 간략하게 살펴보자. 19세기 맥스웰 방정식 정립 이후에도 매질내의 속박전하의 역할에 대한 논란은 물리학과 공학분야에서 지속적으로 존재해 왔으며 아직도 명확한 결론을 내리지 못하고 있는 상태이다. 지금까지 Feynman[3], Griffiths[1], Bobbio[2], Jones[4] 등에 의해 속박전하는 실재하는 것이며 원리적 측면에서 물리적 의미를 부여할 수 있다는 견해가 지배적이다. 한편으로 Feynman은 속박전하는 실재라고 간주할 수 있으나 이에 의한 고체내에서의 전자기력 분포 문제는 아직 미해결임을 지적하고 향후 해결이 기대된다고도 언급하였다[3]. 또한 Bobbio와 Jones도 속박전하로 전자기력을 계산하는 방법에 대해서는 나름의 방법으로 정리하고 있으나 그것이 전반적인 전자기력 밀도를 뜻하기에는 애매하다고 그들의 저서와 논문에서 역시 언급하고 있다. 표면속박전하가 실재라면 그에 미치는 힘도 실재이어야 하지만 그 것을 뒷받침하는 실증적 결과는 지금까지 제시된 바가 없다. Lee[5]는 전자기력 계산방법에 따라 전체 전자기력은 일치하지만 표면력은 등가원천 equivalent source에 따라 모두 다르게 나타나는 것을 인지하였으며, Carter[6]는 전계와 대칭적 의미를 가지는 자계의 자성체에서의 속박전하나 자화전류모델이 비선형에서 힘을 구할 수 없다고 주장하였다. Smith-White와 Cade 간의 1950년 경 전후하여 유전체 내 전자기력밀도 논쟁[7, 8]도 주목할 만하다. Smith-White는 Kelvin력이 진정한 전자기력 분포라고 주장한 반면, Cade는 등가전하에 작용하는 쿨롱의 힘이 물리적 의미가 있다고 주장하였다. Cade와 Bobbio 등은 매질내의 절단면에 따른 형상의존적 전자기력을 언급하기도 하였다.

본 논문에서는 속박전하의 속성을 관찰한 결과, 결론적으로 유전체 표면과 내부의 속박전하는 이것에 의한 외부 필드에의 영향과 유전체 덩어리의 전체의 힘을 계산하는 것에는 유효하지만, 표면에 남은 속박전하 단극에 미치는 힘을 전자기력밀도의 실체로 간주할 수가 없음을 보인다.

본 논문에서의 다음과 순서로 내용을 다루고자 한다. 1) 우선, 연속체 모델의 전계내의 유전체에서의 의미를 깊이 따져보고, 그로 인한 속박전하의 역할과 한계를 명확히 한다. 2) 쌍극자에서의 본 논문에서 제시하는 투사 쌍극자 projected dipole가 유도 되는 과정과 그 뜻을 이해한다. 3) 유전율이 전계와 비선형의 관계를 가지는 경우에 대해 고려한다. 4) 표면속박전하가 가진 한계를 가상공극을 도입함으로써 체적력 밀도로 바뀔수 있음을 보인다. 가상공극은 두 유전체간의 접축력 뿐 아니라 체적력 밀도를 구할 수 있다.

II. 본 론

1. 쌍극자 모델

아래 Fig. 1은 외부의 전계에 의해서 분극 \vec{P} 를 가지는 매질내의 속박전하의 속성을 설명하기 위하여 1차원적인 모델로 매질을 표현하였으며, 내부에는 외부 필드에 의해 분리된 일련의 쌍극자를 나타낸 것이다. Fig. 1에서 (a)에는 실제 분포하고 있을 속박전하의 분포, (b)에는 매질내에서 속박전하를 상쇄하기 위한 원자내의 속박전하간의 거리를 이웃 원자간의 경계까지 늘린 모델을 나타낸다. Fig. 1(c)에서는 매질중간의 전하들이 상쇄되어 경계에만 존재하는 것으로 표현한 것이다. Fig. 1에서의 (b)와 (c)의 두 모델간의 차이와 그 의미에 대해서 본문에서 언급될 것이다. Fig. 1(a)의 속박전하에 비교하여 (b)와 (c)는 투사속박전하라는 약간 변형된 개념을 본 논문에서는 채용하기로 한다. 투사라는 용어는 각 쌍극자의 경계로 단극을 밀어 넣었음을 표현하기 위함이다.

Fig. 2에는 고체내의 원자간(또는 분자간)의 결합을 스포링으로 표현하는 전형적인 구조가 나타나 있다. 각 원자가 힘

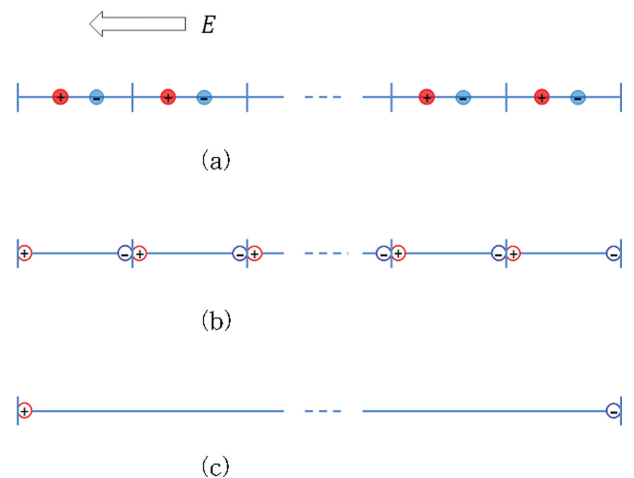


Fig. 1. (Color online) Series dipole models expressed as 1-dimension. (a) real dipoles, (b) dipoles projected to each ends and (c) internally canceled projected dipole.

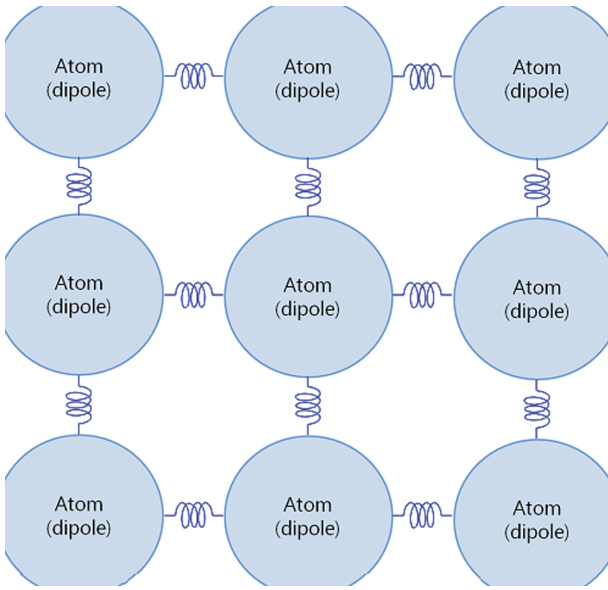


Fig. 2. (Color online) Spring connected atom model.

을 받으면 이웃 원자간의 스프링이 압축되거나 팽창함으로 해서 탄성이 표현되는 것이다. 모델링된 스프링에 전달되는 힘은 기계역학으로 보면 응력 stress이라고 하는 누적된 힘이 전달되는 것이다. 원자간에는 당기는 힘과 반발하는 힘이 균형을 이루는 특정거리에서 균형을 이루어 거리를 유지하고 있다. 여기에 밖에서 힘이 압축력으로 전달되면 거리가 줄어들면서 반발력이 증가하여 밖의 힘과 대응되어 균형을 유지하고, 반대로 당기는 힘이 작용하면 거리가 증가하면서 당기는 힘이 더 작용하게 된다. 즉, 밖의 가한 힘과 상쇄되도록 원자간의 위치가 미세하게 조정이 된다. 이러한 변화가 거시적 매질 측면에서 보면, 찌그러짐 strain으로 나타난다[9]. 이러한 모델에서 외부의 힘에 의해 원자 자신이 찌그러지는 것이 아니고 원자간의 간격이 조절됨으로 해서 외부의 힘과 균형을 이룬다고 보는 것이다. 전자기력이 일련의 쌍극자들에게 동일한 방향으로 작용하면 그 힘은 누적되어 응력처럼 작용하게 될 것이다. 중력에서 바닥에 놓여있는(아래에서 고정하면 위로 향하는 경계조건 힘이 있다고 볼 수 있다) 물체가 가장 아래 부분이 응력을 많이 받는 것처럼 전자기력도 고정된 경계를 향하여 응력은 누적된다. 스프링 모델에서는 누적된 응력부위의 연결 스프링이 가장 압축 또는 인장을 많이 받는 것으로 이해하면 된다. 힘이 과도하게 되면 스프링의 내력 한계를 벗어나게 되고 그러면 결국 끊어질 것이다. 이것은 매질이 파괴되어 부분들이 분해됨을 뜻한다. 이렇게 파괴되는 경우도 원자가 파괴되는 것을 가정하지는 않고 원자고유의 성질을 유지한다고 본다.

Fig. 1의 (c)에서와 같이 매질 내부에서 이웃하는 쌍극자간의 극의 상쇄되는 현상에 대해 다시 고찰해보도록 한다. 여

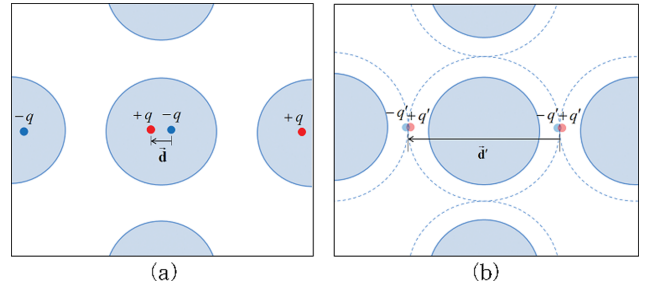


Fig. 3. (Color online) (a) Real dipole model (b) Projected dipole model. The dotted lines are inter-atom boundaries.

기서 원자가 분극현상에 의해 쌍극자가 된다고 보자. 쌍극자 현상은 원자내에서 양전하를 가진 원자핵과 음전하를 가진 전자그룹의 중심간의 이격에 의한 것으로 Fig. 3(a)과 같이 2차원적으로 모델링된다. 쌍극자 사이 공간에는 스프링을 묘사하지 않았다. 여기서 쌍극자 모멘트는 $\vec{p} = q\vec{d}$ 이며 외부에서 가해지는 전계가 강할수록 q 값은 불변이지만 극간의 이격거리 \vec{d} 가 늘어나고 따라서 \vec{p} 도 따라서 커진다. 여기서 q 는 원자가 가지는 양전하의 양이다. 음전하는 $-q$ 로 표현된다. 외부전계가 일정하면 쌍극자 모멘트 \vec{p} 도 일정한 값으로 정해진다. 대개 이격거리 \vec{d} 는 원자 지름크기에 비해 작은 값으로 알려져 있다.

이 쌍극자 모멘트 \vec{p} 에 의한 매질 외부로의 전계영향은 쌍극자위치와 매질 외부의 관심지점간 거리의 삼제곱에 반비례하며, 쌍극자 모멘트 \vec{p} 에는 비례한다. 외부 전계 관심지점간의 거리는 이격거리 \vec{d} 에 비하여 충분히 크다고 가정한 것이다. 하나의 쌍극자 모멘트에 미치는 힘은 이격된 양전하와 음전하에 각 위치에서의 전계를 곱하여 더한값 $q(\vec{E}_{+q} - \vec{E}_{-q})$ 이다. 이것의 미분형태는 켈빈식 $(\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E}$ 로 표현된다[10]. 여기서 쌍극자모멘트 \vec{p} 가 일정한 값으로 주어 질 경우 다음과 같은 식을 생각해 보자.

$$\vec{p} = q\vec{d} = q'\vec{d}' \tag{1}$$

여기서 Fig. 3(b)와 같이 이격거리 \vec{d}' 를 이웃하는 원자와의 중심간의 거리로 가정해보자. 이럴 경우 $d < d'$ 이므로 q' 은 $q' = q(d/d')$ 라는 실제 속박전하 q 보다 작은 값이 된다. 이 q' 을 원자간의 경계에 존재하는 투사속박전하 projected bound charge라 칭하자. 투사속박전하로 모델링 된 쌍극자는 투사쌍극자 projected dipole라 하자. Fig. 3(b)는 투사속박전하에 의한 모델을 나타낸 것이다. 투사속박전하로 표현된 쌍극자의 한쪽의 단극에 미치는 쿨롱포스 $q'\vec{E}$ 는 전하가 q' 으로 작아진 만큼 줄어들게 된다. 전하는 실제양에 비해서 양과 음 모두 d/d' 만큼 줄어들고 전계세기 \vec{E} 는 거의 그대로라고 봐야하므로 단극의 쿨롱포스의 크기는 감소하게 된다. 그러나 극간의 거리는 \vec{d}' 로 늘어남으로 해서, 필드의 변화율과 관련 있는

켈빈식 $(\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}$ 에서 의미하는 바와 같이 \vec{p} 가 변하지 않는다면 하나의 쌍극자에 미치는 힘은 변화가 없다.

이 상황을 좀 더 간단히 나타내기 위해 이미 제시한 Fig. 1(a)에서와 같이 모두 \vec{p} 모멘트를 가지는 쌍극자들로 된 1차 원으로 모델링 된 실과 같은 유전체가 있다고 하자. 이것의 영향에 의한 매질외부의 위치에서의 전계를 구하려면 모든 쌍극자에 의한 영향을 그 위치에서 더해주어야 한다. 분극에 의한 전계의 변화치는 쌍극자 모멘트 \vec{p} 와 거리의 삼제곱에 반비례함을 주지한다. 여기에서 원자간의 경계로 전하를 투사시킨 Fig. 1(b)와 같은 경우도 모든 쌍극자가 동일한 쌍극자 모멘트 \vec{p} 를 가지고 있으므로 역시 이것에 의한 동일한 전계를 발생 시킨다. 즉, Fig. 1(a)와 (b)는 둘 다 모두 동일한 분극 \vec{p} 를 각 쌍극자마다 가지고 있으므로, 매질 외부에서의 전계에의 영향 또한 같다고 보아야 한다. Fig. 1(b)의 경우 쌍극자 간의 접경에서 만나는 전하간에는 서로 상쇄되어 없어지는 효과가 발생하고 결국 Fig. 1(c)와 같이 실 양끝단의 투사속박전하만 남게 되며, 결국 이 두 전하만에 의해 매질 외부에서의 전계를 구하면 된다. 이 과정은 이미 많은 교과서에 설명하고 있는 방법이다. 여기서 주의 할 점은 기존의 교과서에서 이와 같은 방식으로 다루는 속박전하는 실체가 아닌 맨끝 쌍극자내의 투사된 속박전하이여야 한다는 것이다. 또한 주목할 것은 Fig. 1(c)와 같이 양 끝단의 속박전하만으로 구한 전계와 Fig. 1(a)와 Fig. 1(b)에 의한 영향은 동일하다는 것이다.

쌍극자 모멘트는 연속체에서 분극밀도 \vec{P} 로 표현되고 표면에만 남은 속박전하밀도는 $\sigma_{bnd} = \vec{P} \cdot \vec{n}$ 으로 표현된다. 여기서 \vec{n} 은 면에 수직인 단위벡터이다. 즉, 매질 외부에서의 전계는 매질내의 \vec{P} 에 의한 영향을 적분하여 구하거나 매질 표면에서의 속박전하밀도 σ_{bnd} 만으로 구하는 것 모두 문제가 없다. 매질 표면에서의 전하밀도 σ_{bnd} 는 위에서 설명한 표면으로 투사된 속박전하밀도임을 주의한다. 이제 쌍극자에 미치는 전자기력을 관찰해보자. Fig. 1의 유전체 실에 미치는 전체 힘을 구하려면 각 쌍극자에 미치는 힘의 합을 구하면 될 것이다. 앞에서 설명했듯이 실제전하이건 투사된 양의 전하이건 \vec{p} 가 동일하다면 그 쌍극자에 미치는 힘은 동일하여야하므로, Fig. 1(a)에서의 힘의 합은, 경계로 투사된 쌍극자들을 가지는 Fig. 1(b)의 힘의 합과 같아야 하고 이는 곧 양끝단에만 투사 전하가 존재하는 Fig. 1(c) 모델에 미치는 힘과 같게 된다. 즉, 실 전체에 미치는 힘은 양끝단의 단극으로 투사된 전하에 미치는 힘만을 구하여 더하면 된다. 그러나 Fig. 1(c)와 같은 모델은 매질 덩어리 전체에 대한 힘으로 유의미 하지만, 각 쌍극자에 미치는 힘 또는 내부 전자기력 밀도로 볼 수는 없다. 각 쌍극자에 미치는 힘을 구하려면 1(a) 또는 1(b)와 같은 모델에서만 가능하다. 즉, 양끝단 속박전하만 존재하는 모델 1(c)는 전체힘만을 구할 수 있는 모델이다. 양끝단으

로 투사된 단극전하에 미치는 쿨롱포스도 실제 단극이 아닌 투사전하에 미치는 힘일 뿐 아니라, 끝단에 위치한 쌍극자 반쪽에 미치는 힘이라는 것이다. 쿨롱포스 $q\vec{E}$ 와 $q'\vec{E}$ 은 dd' 만큼의 차이가 있음을 상기하자.

매질이 선형일 경우, 내부의 속박전하는 모두 상쇄되므로 표면 S 에 대해서 적분하면 속박전하 총량 CB_{total} 은 다음 식으로 표현된다.

$$CB_{total} = \oint_S \sigma_{bnd} dS = \oint_S (\vec{P} \cdot \vec{n}) dS \quad (2)$$

표면전하밀도에 가해지는 외부전계는 $\vec{E}_o = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)/2$ 로 구할 수 있다[2]. 여기서 \vec{E}_1 과 \vec{E}_2 는 경계를 기준으로 각각 양쪽 매질에서의 전계이다. \vec{E}_o 를 구하기 위한 구체적 방법은 뒤에서 다룬다. 전체 전자기력은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$F = \oint_S \sigma_{bnd} \vec{E}_o dS \quad (3)$$

지금까지의 결론을 다시 정리하면, 기존의 교과서등에서 기술되어오는 속박전하는 실제 존재하는 속박전하의 의미보다는, 각 쌍극자가 차지하는 경계 또는 매질의 경계로 투사된 전하량이라고 보아야한다. 비선형경우를 제외하면 유전체 내부의 쌍극자 간의 경계에서의 속박전하는 상쇄된 것으로 볼 수 있지만, 이럴 경우 경계의 속박전하밀도 σ_{bnd} 에 의해서 외부에 미치는 전계 구하기와 유전체 덩어리의 전체 힘만을 구할 수 있는 것이다. 내부에 존재하는 전자기력 분포는 이 방식으로는 구할 수 없다. 속박전하에 의한 내부 전자기력 구하기는 뒤의 절에서 다루도록 한다.

2. 연속체 모델

전계에서의 연속체라 함은 아무리 미소한 체적을 잡더라도 그 안에는 무수히 많은 원자가 존재하여 원자 내부 이하의 구조를 마이크로 micro하게 들여다보지 않고 연속적인 물질 평균값인 유전율 ϵ 으로 간주하는 즉, 매크로 macro하게 매질을 바라보는 것이다. 속박전하는 최소 단위의 체적인 알갱이인 쌍극자(원자 또는 분자) 내에서 분극하여 양단에 분포하는 전하로서 마이크로한 관점에서 바라본 개념이다. 현재의 전자기학 교과서는 매질과 그의 내부에 존재하는 전자기장을 말하고자 할 때 연속체임을 전제로 한다. 연속체 관점을 유지하려면 속박전하에 의한 결과를 매크로하게 해석하여야 하는 것이며, 쌍극자 내부를 바라보는 마이크로한 관점에서의 속박전하 자체에 의미를 부여하게 되면 연속체의 일관된 개념에 어긋나게 된다. 쌍극자 내에서의 각 단극 속박전하에 각각 미치는 쿨롱포스는 쌍극자 내부를 마이크로하게 바라 본 힘이며, 양과 음의 속박전하에 미치는 쿨롱포스의 합으로 표현되

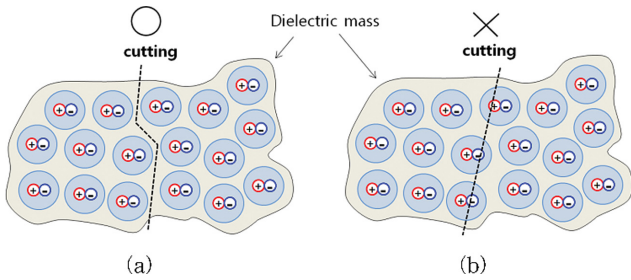


Fig. 4. (Color online) Cutting under continuum definition (a) conforming, (b) not conforming.

는 식인 켈빈력 $(\vec{P} \cdot \nabla)\vec{E}$ 은 매크로개념이라 볼 수 있다. 결국 매크로한 연속체 관점에서는 쌍극자의 반쪽인 단극 속박 전하에 미치는 쿨롱포스는 무의미하여야 한다. 실 물리세계에서는 매질의 성질을 유지하면서 최소단위 쿼텀인 쌍극자 1개만 존재하는 극단적으로 작은 체적을 생각해 볼 수 있고, 그 이하의 분리는 허용되지 말아야 한다. 이 최소단위 쌍극자가 유전체의 성질을 대변하는 물리적 최소 단위인 것이다. 즉, 이런 쌍극자 쿼텀의 수많은 합으로 유전체는 이루어져 있다. 유전체의 기본 단위인 쌍극자 자신이 쪼개지게 되면 본래의 성질을 잃게 될 뿐 아니라 연속체 접근에 위배된다. Fig. 4와 같이 매질 덩어리의 어떠한 부분을 잘라내서 취하더라도 유전체 성질을 정의하는 최소구성요소인 쌍극자가 쪼개지는 것을 가정하지 말아야 한다. 본 논문에서는 이것을 자명한 연속체의 공리로 채택한다. 쌍극자를 쪼갠다는 것은 매질의 기존성질을 가지게 하는 원자 또는 분자를 쪼개어 다른 매질이 되는 것이므로 연속체 관점에서 당연히 허용될 수 없다. 공리를 준수하는 관점에서 체적력밀도라는 것도 결국 무한히 작은 체적에서의 정수개의 쌍극자에 미치는 전자기력을 그 체적으로 나눈 평균 체적력으로 간주해야 하는 것이다. 외부전계에 미치는 영향이건 매질내의 전자기력 이건 쌍극자를 기본 단위로 생각해야 하는 것이다.

연속체 공리관점에서 보면 하나의 쌍극자 내의 속박전하의 합이 동일한 크기를 가지며 부호만 다른 전하의 합이므로 0일 수밖에 없다. 정수개의 쌍극자가 존재해야 하는 임의의 체적에서는 속박전하의 총량도 반드시 0이어야 한다. 즉, 기존의 교과서에서의 기술과 다르게 속박전하의 밀도는 선형과 비선형 매질의 경우를 막론하고 0이어야 한다. 물론 전 절에서도 언급하였듯이 유전체 최외곽에는 속박전하가 단극형태로 남게 되는 것으로 간주할 수 있는데, 이것이 무의미하게 버려지는 것은 아니고 외부 필드에 미치는 영향과 전체 힘 계산에는 유효함을 이미 보였다.

3. 비선형의 경우

매질의 비선형을 고려할 경우, 속박전하 표면밀도인

$\sigma_{bnd} = \vec{P} \cdot \vec{n}$ 와 더불어 속박전하 체적밀도인 $\rho = -\nabla \cdot \vec{P}$ 를 함께 고려하여 분극에 의한 외부 전계에 미치는 영향을 고려하게 된다. 비선형 매질의 경우 σ_{bnd} 는 표면에, ρ 는 내부에 존재하는 속박전하밀도로 간주한다. 이것은 전하 총량을 고려하기 유용한 밀도 개념이다. 그러나 σ_{bnd} 에 미치는 힘이 앞절에서의 이유로 쌍극자에 미치는 힘으로 볼 수 없고 쌍극자내의 투사된 한쪽 단극에 미치는 쿨롱힘인 것을 다시 언급해둔다. 쌍극자에 미치는 힘으로 볼 수 없음은 결국 쌍극자의 무수한 합인 연속체에 미치는 힘으로도 볼 수 없음을 뜻한다.

다음으로 ρ 에 미치는 힘에 대해 검토해 보자. 매질내부에 어떠한 미소한 체적을 잡더라도 연속체 관점에서는 쌍극자의 정수 개가 그 안에 들어있어야 한다. 정수개의 쌍극자 내에는 반드시 속박전하의 합은 0이 될 수밖에 없다. 곧, 이것은 속박전하의 체적밀도 ρ 는 미소체적내의 총 전하의 합을 그 체적으로 나누어서 구하게 되는 데, 체적내에서 정수개의 쌍극자만이 존재하여야 한다고 하였으므로 연속체에서는 $\rho = 0$ 임을 의미하게 된다. 이는 일반적으로 $\rho = -\nabla \cdot \vec{P}$ 이 0이 아닌 것으로 보는 관점과 모순이 된다. 이 값이 0이 아니라는 것은 +와 -극의 비율이 깨져 한쪽으로 치우친 단극의 밀도를 뜻하는 데, 쌍극자 모델에서는 단극이 매질 내부적으로 존재할 수 있는 경우는 내부의 어떤 경계를 기준으로 유전율의 차이로 인한 경우에 발생한다. 즉, 유전율이 다른 매질간의 경계에서 단극 밀도가 나타난다고 볼 수 있다. 이 단극밀도 또한 위에서 설명한 쌍극자 경계로 투사한 양의 차이일 수밖에 없으며 이 단극은 위에서의 결론과 마찬가지로 외부필드에의 영향과 유전체 덩어리 전체 힘을 계산하는 것에만 유용하다. 역시 내부의 전자기력 밀도를 계산하는 것에는 사용할 수 없다. Fig. 5에는 위에서 아래로 수직으로 향하는 일정한 \vec{E} 필드가 있을 때를 가정하고 위아래 각각 ϵ_1 과 ϵ_2 의 매질로 접하고 있다고 하자. 각 매질에는 분극량이 각각 \vec{P}_0 와

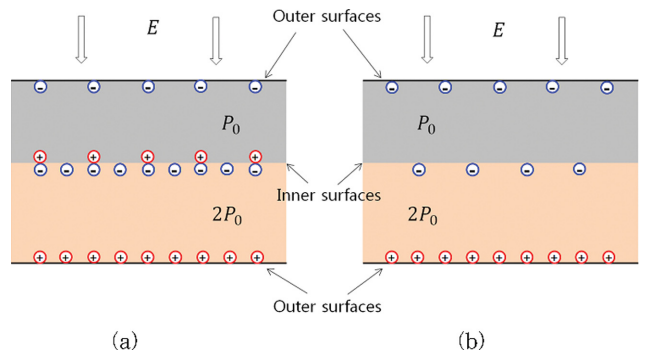


Fig. 5. (Color online) A dielectric body having two bonded different polarized dielectrics under normal field. The internal bound charges are not shown because of cancellation. (a) All surface bound charges are remained even on inner surfaces. (b) Cancellation of bound charges on inner surface.

$2\vec{P}_0$ 로 유도되었다고 가정한다. 매질의 경계에는 단극밀도를 정성적으로 보여주고 있다. Fig. 5(a)는 각각의 동일 매질내에서 내부의 속박전하만 상쇄하고 두 매질간의 접하는 표면을 포함하여 각 표면전하밀도 σ_{bnd} 를 그림으로 표현한 것이다. Fig. 5(b)는 두 매질간의 접하는 표면에서 서로 상쇄하여 남은 전하만을 표현한 것이다. Fig. 5(a)와 (b)에서 최외곽에 드러난 전하의 합은 0이 되지 않고, 매질 간의 접면에서의 전하까지 고려하여야 전체 전하합이 0이 된다. 즉, 분극이 일정한 영역으로 간주되는 영역에서 각 매질의 표면으로 드러난 +와 - 전하의 합은 0이 되는데 반해, 모든 매질의 합한 최외곽 전하만으로는 0이 되지 않는다. 그러므로 $\rho = -\nabla \cdot \vec{P}$ 가 0이 아닌 의미는 Fig. 5(b)의 내부접면에서의 남은 속박 전하를 나타내기 위해서 사용되는 것이다. 즉 σ_{bnd} 와 ρ 에 의한 전하적분이 0이 되도록 간주하는 관점인 것이다. Fig. 5의 모델은 비선형의 경우 분극밀도 $\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E}$ 가 특정경계에서 불연속으로 나타난다고 본 표현이다. 연속체내에서는 무수히 많은 경계가 매우 작은 거리를 가지고 존재한다고 볼 수 있으므로, 거시적으로는 연속으로 변하는 것으로 관찰된다.

비선형을 고려한 체적에 대한 속박전하 총량 CB_{total} 을 분극 \vec{P} 로 표현하는 다음 식을 보자.

$$CB_{total} = \oint_S (\vec{P} \cdot \vec{n}) dS + \oint_V (-\nabla \cdot \vec{P}) dv \quad (4)$$

여기서 S 는 체적 v 를 감싸는 폐곡면이다. 이 식에 오른쪽 두 번째 항에 발산정리를 적용하면,

$$CB_{total} = \oint_S (\vec{P} \cdot \vec{n}) dS - \oint_S (\vec{P} \cdot \vec{n}) dS \quad (5)$$

이며 항상 CB_{total} 은 0이 될 수밖에 없다. 여기서 개념적으로 혼돈이 발생하는 것이 $\rho = -\nabla \cdot \vec{P}$ 가 속박전하의 체적밀도인 것인가, 아니면 CB_{total} 를 그 체적인 v 로 나누고 $v \rightarrow 0$ 으로 보내는 것이 속박전하의 체적밀도인 것인가 하는 문제이다. 당연히 후자의 개념이 한계의 체적내에서의 모든 속박전하를 포함하는 것이므로 이것이 물리적으로는 옳다. 이렇게 보면 앞에서 언급한 연속체내의 속박전하밀도가 0이어야 하는 논리와 일치한다. 그러므로 (4)와 (5)식의 의미는 체적당어리내의 부분 체적에 대해 $\sigma_{bnd} = \vec{P} \cdot \vec{n}$ 을 폐곡면 적분한 양이 비선형에서는 0이 되지 않는 경우가 있으므로 그 반대부호 양만큼 이 내부에 존재하는 양을 $\rho = -\nabla \cdot \vec{P}$ 로 대치한 것으로 이해하여야 한다. 즉, 분극양이 다른 두 개의 부분체적이 만나는 접면에서의 표면속박전하의 차이가 속박전하 밀도 ρ 로 표현하는 것으로 이해하여야 한다.

4. 속박전하에 의한 내부의 힘 구하기

매질내의 분극 \vec{P} 의 분포를 알면, Fig. 6과 같이 임의의

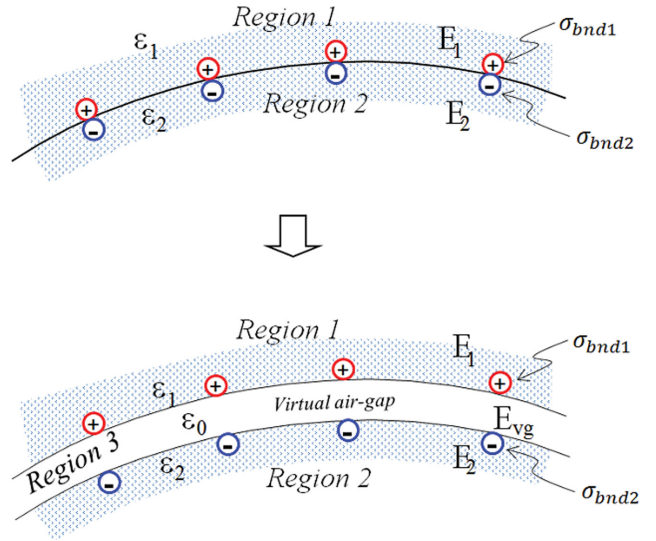


Fig. 6. (Color online) Introduction of virtual air-gap between region-1 and region-2.

단면 표면에서의 투시속박전하표면밀도 σ_{bnd} 를 알 수 있다. 잘라진 단면에 의해 마주보며 분포하는 표면밀도는 기본적으로 부호가 반대이며 유전율 ϵ 과 분극값 \vec{P} 에 따라 크기는 달라질 수 있다. 마주보는 경계면에서의 유전율과 분극이 같다면 각 영역의 표면 속박전하밀도는 동일하다. 마주보는 단면에 분포하는 양과 음의 속박전하밀도는 원거리의 전계에 영향을 미치지 않지만 부호가 반대이고 위치가 거의 동일하므로 상쇄되어 고려할 필요가 없어진다. 주의할 것은 실제로 속박전하가 없어지는 것이 아니고 외부전계에 미치는 영향이 상쇄되어 없으므로 고려치 않는 것이다. 여기서 Fig. 6의 영역1에 미치는 전자기력에 대해 고려해보자. 표면에 속박전하밀도가 구해진 것을 전제로 하면 폐곡면에 대해 식(3)을 적용하여 영역1에 미치는 전자기력을 구할 수 있을 것이다.

본 논문의 저자는 이미 이 문제에 대한 성공적인 해결책을 제시한 바 있는데, 바로 가상공극 virtual air-gap적인 접근법이다[11-13]. 본 논문에서는 속박전하와 가상공극의 관계로부터 속박전하의 분명한 의미를 묘사하고자하는 것이다. 이 접근법에 의하면 두 개의 유전체가 적당한 거리를 두고 특정 전계하에 있을 때, 상호간에 전자기력이 발생이 되는 데, 그 간격 거리를 줄여나가 완전한 접촉이 되었을 때도, 각 매체의 전체 전자기력을 계산해 낼 수 있다는 것이다. 접촉면에서도 마치 공극이 미소하게 존재하는 것으로 가정된 방법이며, 자성체에 가상공극을 공학적으로 실용적으로 전개한 참고 문헌[14-16] 등을 참고하기 바란다. 가상공극에서의 필드 \vec{D} 와 \vec{E} 는 경계조건에 의해 구하게 된다. 접면에서 자유전하가 없을 때, \vec{D} 의 면수직성분 \vec{D}_n 이 연속적이고 \vec{E} 의 면수평성분 \vec{E}_t 이 연속이라는 경계조건으로부터 유전체 내의 필드

\vec{D} 와 \vec{E} 로부터 가상공극에서의 필드를 구할 수 있다. 경계면에서 자유전하가 없으면, 영역 1의 \vec{D}_1 와 \vec{E}_1 로 부터, 접하고 있는 영역2에서의 필드 값은

$$\vec{D}_{n2} = \vec{D}_{n1} \quad (6)$$

$$\vec{E}_{t2} = \vec{E}_{t1} \quad (7)$$

와 같고, $\vec{D}_{t2} = \epsilon_2 \vec{E}_{t2}$ 에 의해 \vec{D}_2 의 벡터 성분을 온전히 구할 수 있는 것이다. 물론 \vec{E}_2 도 구할 수 있다. 가상공극을 영역3라 보고, 유전체 내부의 \vec{D} 와 \vec{E} 의 분포를 모두 안다면 어떠한 절단면이라도 그 절단면내의 가상공극 필드를 얻을 수 있다. 이는 Fig. 6의 절단면과 접하고 있는 경계에서 속박전하에 미치는 \vec{E}_o 필드를 구할 수 있음을 뜻한다. \vec{E}_o 를 구할 수 있음은 곧 영역1의 전체 전자기력을 온전히 구해 낼 수 있음을 뜻한다. 물론 영역2의 전체 전자기력도 동일한 방식으로 구해낼 수 있다. 이는 중요한 의미를 내포하고 있는데, 유전체 내의 \vec{D} 와 \vec{E} 를 알고 있으면, 어떠한 가상의 또는 실제 절단을 행하더라도 그 조각의 전자기력을 속박전하의 분포로 구해 낼 수 있음을 뜻하는 것이다. 즉, 속박전하와 가상공극을 함께 고려하면 유전체 내부의 전자기력의 분포를 알 수 있다. 내부의 전자기력을 구하기 위해서는 절단면의 양쪽에 당연히 표면속박전하 σ_{bnd1} 과 σ_{bnd2} 가 상쇄되지 않고 각각 존재하는 것으로 보아야 한다. 이는 물리적으로도 당연한 것이다. 외부 전계를 구하기 위해 상쇄되어 없어지는 효과 때문에 내부의 속박전하를 고려치 않았음을 위에서 지적한 바가 있다. 속박전하는 기본적으로 쌍극자라고 하는 쿼텀에서 반드시 존재하는 극이므로 실제 상쇄될 수는 없는 것이다. 이는 실제로 단면을 잘라내건 아니면 절단면을 내기 전에 상황에서도 마찬가지이다.

가상공극을 고려하면 속박전하 방법뿐 아니라, 기존의 맥스웰웁력법을 포함한 모든 전자기력 계산방법을 동일하게 전자기력 계산에 사용할 수 있으며, 이들의 결과는 당연히 같다. 왜냐하면 지금까지 개발된 전자기력 계산법들은 공극으로 둘러싼 개별물체의 전자기력 계산에 대해 수치해석적으로도 실험적으로도 오류가 없음을 보여 왔기 때문이다. 가상공극에 의해 절단되어진 조각의 전자기력에 대해 조각의 체적크기로 나누어 주면 그 조각의 평균 체적력밀도가 나오게 된다. 조각의 크기를 무한히 작게 가져가면 한 지점에서의 정확한 체적력밀도라 할 수 있다. 이 체적력 밀도에 대한 수학적 표현은 추후의 다른 연구에서 다루기로 한다. 그 이유는 본 논문에서 다루기에는 그 내용이 복잡하고, 형상의존이라는 미묘한 개념에 대하여 논하여야 하기 때문이다.

외부자계에 있는 자성체의 속박자하 bound magnet charge를 이용한 가상공극의 수치해석적 접근을 위한 구체적

방법은 참조논문[11]에 설명되어 있다. 이 논문을 참조하면 접하는 면의 한쪽영역에서 속박자하를 구하게 되면 이와 접하고 있는 다른쪽의 영역으로부터 경계조건에 의한 가상공극의 필드를 구하도록 되어있다. 이와 동일한 방법으로 전계에서의 유전체내의 가상공극내의 필드 \vec{E}_{vg} 을 구하게 되면 접면에서의 속박전하에 영향을 미치는 외부전계를 $\vec{E}_o = (\vec{E}_i + \vec{E}_{vg})/2$ 를 통하여 구한다. 여기서 \vec{E}_i 는 영역1 또는 영역2에서의 내부필드이다.

이 절의 내용을 요약하면, 유전체 내의 임의의 절단면을 만들어서 그 내부에 분포하는 \vec{D} 또는 \vec{E} 에 의해 절단면 내에서의 가상공극값을 구하고, 그 절단면의 양쪽에서의 속박전하를 구하게 되면, 결과적으로 절단면에 의해 구분되는 양쪽 매질의 전자기력을 구할 수 있다는 것이다. 절단면을 유전체 내부에서 폐곡면으로 잘라내게 되면 임의의 내부 유전체 조각에 대한 전자기력을 구할 수 있다. 즉, 속박전하는 앞 절에서 언급한 분극에 의한 원격외부의 전계에 미치는 영향과 유전체 덩어리 전체에 미치는 힘을 구할 때 유의미할 뿐 아니라 이 절에서 언급한 가상공극 개념을 더하면 내부 전자기력 계산에도 유의미하게 된다. 가상공극을 사용하는 과정에서 체적력밀도를 알아내기 위해서는 유전체 내의 전속밀도 \vec{D} 와 전계세기 \vec{E} 가 모두 유용하게 사용됨을 알 수 있다.

쌍극자와 쌍극자 사이는 원자-원자간 또는 분자-분자간의 영역으로 볼 수 있으며, 실제적으로 그 영역은 살짝 떨어진 빈공간으로 볼 수 있음을 주지한다면, 가상공극이 '가상'만이 아닌 실제적 공간으로도 이해될 수 있다. 매질이 분리될 때 바로 이 빈공간이 분리되는 것이다. 연속체 개념에서는 쌍극자 자신이 반으로 분리되는 것은 가정하지 않는다. 원자간 또는 분자간에는 힘의 균형이 작용하며 여기에 외부에서의 힘이 가해지면 쌍극자간의 거리가 미세하게 변화한다. 이 변화에 의한 균형점은 외부의 힘에 대항하는 힘으로 나타난다. 이것들은 역학적 관점에서 응력이라는 단위면적에서의 힘으로 표현한다. 전자기력은 이러한 정/동역학적 상태를 만들어주는 데 기여하는 하나의 원격 작용으로 보아야 한다. 이러한 외부의 필드에 의한 전자기력은 매질에 응력을 발생시키는 원인이 된다. 매질 외부에 필드가 존재하지 않는 상태, 즉, 전자기 체적력이 없는 상태, 에서는 쌍극자간의 응력은 없는 것으로 간주하여야 한다.

5. 전자기력 밀도 계산을 위한 수치해석적 고려사항

어떤 유전체(또는 자성체) 덩어리에 전자기력이 작용하여, 그것에 의한 변형을 구하려면 그 덩어리에 미치는 전자기 체적력을 구할 필요가 있다. 이 체적력을 수치해석으로 구하기 위한 개념적인 접근을 살펴보자.

외부에서 주어진 전계와 전자기적 경계조건하에서 어떠한

유전체 덩어리에 미치는 전자기력은 시스템 밖과의 작용으로 주어지는 외력과 시스템 내의 덩어리 내부의 유전체 질점에 서로 작용하는 힘인 내력이 있다. 체적력 밀도의 의미는 바로 이런 질점에 미치는 모든 영향을 고려한 전자기력 밀도이다. 이러한 체적력을 구한 후 기계적 구속경계조건을 다시 부여하여 정역학 또는 동역학해석을 통해 유전체 덩어리 내부의 응력분포와 더불어 각 부분의 변형을 구할 수 있게 된다. 역학의 풀이를 위한 수치해석으로는 전자기해석과 응력해석 두 번의 과정을 연속으로 거치는 것이다.

어떤 질점에 미치는 내력은 외력뿐 아니라 자신의 질점을 제외한 모든 질점과의 상호 작용(전자기적 인력 또는 척력)으로부터 힘을 모두 더해야 하는 데, 모든 질점에 대해 이러한 힘을 행하는 것은 무한대의 해석시간이 요구되게 된다. 만약, 유한 요소와 같이 n 개의 유한한 체적으로 덩어리를 분할한다고 하면, 그 덩어리의 내부 힘을 구하기 위해 $n(n-1)$ 번의 유한요소 해석을 요구하게 되며, 이는 비현실적이다. 매질 덩어리 관점에서 외력과 내력을 구분하기 보다는, 관점을 덩어리 내부의 질점으로 옮길 필요가 있는데, 질점에서 미치는 모든 힘은 모두 외력으로 보는 것이다. 이 질점에 미치는 힘이 바로 전자기 체적력으로 표현이 되는 것이다.

수치해석적 관점에서는 특정 질점을 유한한 크기로 보고, 그 유한한 부위를 감싸는 가상공극을 생각할 수 있으며, 그 안에서 값을 후처리과정에서 구할 수 있다. 이 논문 앞 절 등에서 언급한 가상공극 안쪽 체적의 σ_{bnd} 와 ρ 에 미치는 힘을 구하는 방식을 택하거나 그 체적을 감싸는 폐곡면의 가상공극에서 맥스웰 응력법등을 적용하면 된다. 폐곡면은 가상공극을 포함하거나 포함하지 않을 수 있다. 이러한 유한체적에 대한 전체 전자기력의 의미는 덩어리 밖의 모든 부위와의 관계를 반영한 것이라 할 수 있다. 즉, 가상공극에서의 전체값은 앞에서 언급한 모든 관계를 반영한 최종 결과물로 간주할 수 있다. 이렇게 구한 내부덩어리의 전체 전자기력을 그것의 체적값으로 나누어 주게 되면 그 유한체적내에서의 평균적인 체적력 밀도로 간주할 수 있다. 수치해석에서는 유한한 체적은 개념적으로는 그 체적을 무한소로 가져감으로 해서 하나의 질점을 표현 할 수 있게 되는데, 무한소 체적의 전자기력을 무한소 부피로 나눈, 즉, 질점에서의 체적력 밀도를 구하게 되는 것이다.

가상공극과 속박전하에 의한 하나의 요소에 대한 전자기력은 Fig. 7과 같이 할 수 있다. e_0 요소 표면에서 식(3)을 적용하여 요소의 전체 전자기력을 구하고 그 요소의 부피를 나누어 줌으로 해서 전자기 체적력 밀도를 구할 수 있다. 이렇게 구한 체적력 밀도는 요소 e_0 내의 모든 질점의 체적력 밀도에 대한 평균값으로 간주되어야 한다. 이러한 전자기력을 구하는 과정은 전처리과정에서 사전에 요구되는 것이 없고 후

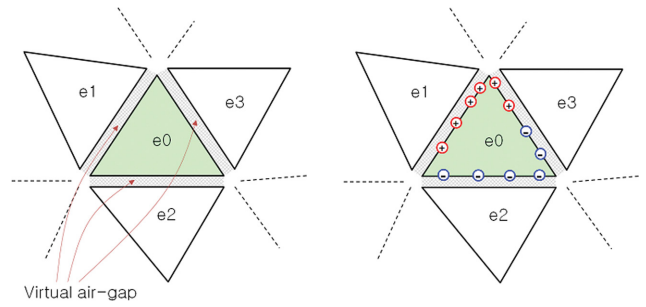


Fig. 7. (Color online) An illustration for the calculation of an element force, integrating Coulomb force along the surface of element with surface bound charge. (a) Virtual air-gap on the edge of element. (b) Surface bound charge density.

처리과정에서 독립적으로 수행 가능하다.

IV. 결 론

본 논문에서는 매질내부의 속박전하의 의미에 대해 고찰하였고, 전기기기등의 해석을 위해서 그 뜻을 명확히 하였다. 내부에서 상쇄되고 표면의 분포로 본 속박전하는 외부의 전계에 영향을 미치고, 매질덩어리의 전체 전자기력 계산에만 유용함을 밝혔다. 쌍극의 속박전하중 단극에 미치는 분포된 힘은 응력해석에 있어 무의미한 힘을 뜻하며 원자 또는 분자 내부의 반쪽의 힘으로 간주된다. 쌍극자의 각각에 미치는 힘의 합이 물리적 의미를 갖는 전자기력이 되는 것이다. 속박전하가 매질 덩어리 내부에서 상쇄되어 없어지기 위해서는 투사속박전하의 개념을 도입하여야 함을 보였다. 표면에서의 단극 투사속박전하에 미치는 힘은 덩어리의 전체 표면적분으로 보는 것을 전체로 하여 유의미하다. 이러한 유의미성에 가상공극을 도입하면 덩어리 내부까지 전자기력 계산을 확장하여 생각할 수 있음을 보여주었다. 속박전하가 투사된 양이라 하더라도 덩어리의 전체 힘의 계산에는 유의미하므로, 가상공극에 의해 큰 덩어리가 작은 덩어리로 분할되어 각각의 작은 덩어리의 전자기력을 계산할 때 투사된 속박전하는 유효한 것이다. 매질 내의 작은 덩어리의 표면 속박전하분포는 가상공극을 도입하여 도출하여야 한다.

본 논문의 결론은 자성체에 대해서도 동일하게 적용이 가능하다. 속박전하는 속박자하로 대체하여 전개하면 된다. 자성체는 속박자하외에 속박자화전류 bound magnetizing current도 모델링이 가능하며 이 또한 동일한 결론을 내릴 수 있다. 즉, 투사속박자하와 투사속박자화전류를 도입할 수 있다. 자성체 내부에서는 상쇄되고 표면에 남은 단극의 투사속박자하 또는 단방향 속박자화전류는 외부의 자계에 영향을 계산하는 것에 문제가 없고, 내부 전자기력 밀도 계산으로는 사용할 수 없다. 그러나 전체 전자기력 계산에는 역시 유의미

하므로, 가상공극을 도입한 자성체 덩어리내의 작은 덩어리 전자기력 계산에 사용할 수 있다. 내부의 작은 덩어리의 전자기력 계산이 가능함은 곧, 전자기력 밀도를 계산할 수 있음을 의미한다. 이렇게 계산된 전자기 체적력 밀도는 기계역학 방정식의 외부 힘으로 입력되어, 자성체 덩어리의 분포된 응력과 변형을 계산할 수 있는 것이다. 이 역시 전자기장 계산에 이은 별도의 계산과정을 거치는 것이다.

본 연구는 저자의 “맥스웰 응력텐서의 물리적 의미의 고찰”의 논의[17]에 이은, 매질 내의 속박된 등가원천의 역할에 대한 고찰이다. 두 연구에서 일관된 결론으로는 맥스웰의 응력으로 나타나는 표면력과 표면에 남은 속박 단극전하의 표면력은 모두 전자기력 밀도로서의 의미가 없음을 보여준다.

감사의 글

이 논문은 2016학년도 경북대학교 연구년 교수 연구비에 의하여 연구되었음.

References

- [1] D. J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, chapter 4, Prentice-Hall (1999).
- [2] S. Bobbio, Electrodynamics of Materials: Forces, Stresses, and Energies in Solids and Fluids, Academic Press (2000).
- [3] R. Feynman, R. B. Leighton, and M. L. Sands, The Feynman Lectures on Physics Volume II, chapter 10, Addison-Wesley Publishing Co. (1964).
- [4] T. B. Jones, J. Electrostatics **6**, 69 (1979).
- [5] T. H. Lee, Transactions of the American Institute of Electrical Engineers **76**, 267 (1957).
- [6] G. W. Carter, Proc. IEE **112**, 1771 (1965).
- [7] R. Cade, Proc. Phys. Soc. **64**, 665 (1951).
- [8] W. B. Smith-White, Proc. Phys. Soc. **64**, 945 (1951).
- [9] S. O. Kasap, Principles of Electronic Materials and Devices, chapter 1, McGraw Hill Book Co. (2006).
- [10] S. Bobbio, F. Delfino, P. Girdinio, and P. Molfino, IEEE Trans. Magn. **36**, 663 (2000).
- [11] H. S. Choi, S. H. Lee, and I. H. Park, IEEE Trans. Magn. **41**, 1420 (2005).
- [12] H. S. Choi, I. H. Park, and S. H. Lee, IEEE Trans. Magn. **42**, 531 (2006).
- [13] H. S. Choi, I. H. Park, and S. H. Lee, IEEE Trans. Magn. **42**, 663 (2006).
- [14] J. H. Seo and H. S. Choi, IEEE Trans. Magn. **50**, 7012904 (2014).
- [15] B. S. Park, H. D. Kim, H. S. Choi, and I. H. Park, J. Electrical Eng. Technol. **10**, 1349 (2015).
- [16] H. S. Choi, J. H. Lee, and I. H. Park, IEEE Trans. Magn. **41**, 1464 (2005).
- [17] H. S. Choi, I. H. Park, and W. K. Moon, Trans. KIEE **58**, 725 (2009).