

## Analysis of the Effect of Manufacturing Tolerance on Induction Motor Performance by Univariate Dimension Reduction Method

Sang-Kyun Lee, Byung-Su Kang, Jong Hyun Back, and Dong-Hun Kim\*

Department of Electrical Eng., Kyungpook National University, Daegu 41566, Korea

(Received 17 November 2015, Received in final form 1 December 2015, Accepted 3 December 2015)

This paper introduces a probabilistic analysis method in order to analyze the effect of manufacturing tolerance on induction motor performance occurring in massive production. The univariate dimension reduction method is adapted to predict probabilistic characteristics of a performance function due to certain probabilistic distributions of design variables. Moreover, the sensitivity information on mean and variance of the performance function is estimated, and then the effect of randomness of individual design variables on the probability performance function is analyzed. The effectiveness and accuracy of the method is investigated with a mathematical model and an induction motor.

**Keywords :** motor, univariate dimension reduction method, probabilistic performance function, manufacturing tolerance

### 단변수 차원 감소법을 이용한 제작 공차가 유도전동기 성능에 미치는 영향력 분석

이상균 · 강병수 · 백종현 · 김동훈\*

경북대학교 전기공학과, 대구시 북구 대학로 80, 41566

(2015년 11월 17일 받음, 2015년 12월 1일 최종수정본 받음, 2015년 12월 3일 게재확정)

본 논문에서는 전동기 제작과정에서 발생하는 제작공차가 유도전동기 성능에 미치는 영향력을 분석하기 위하여 확률론적 해석 기법을 도입하였다. 단변수 차원 감소법을 사용하여 특정한 확률분포를 갖는 설계변수에 의해 발생하는 성능함수의 확률분포 특성을 예측하였다. 또한 확률성능함수의 평균과 분산의 민감도 정보를 도출함으로써 개별 설계변수의 임의성이 확률성능함수의 분포에 미치는 영향력을 분석하였다. 제안된 기법은 간단한 수학예제와 유도전동기 모델에 적용하여 그 효율성과 정밀도를 검증하였다.

**주제어 :** 전동기, 단변수차원감소법, 확률성능함수, 제작공차

#### I. 서 론

지금까지 전기기기 및 소자의 해석과 설계단계에서 관련된 모든 변수는 고정된 상수 값을 갖는다고 가정하였다. 그러나 실제 공학문제에서는 입력과 출력에 관계된 변수들은 항상 각자 고유한 확률적인 분포특성을 갖는다. 즉, 제품의 제작과정에는 재료의 물성, 공차, 외부환경 등에 필연적으로 포함되는 제어할 수 없는 불확실성(uncertainty)이 내재된다. 이러한 인자는 제품의 성능변동을 초래하게 되어 고품질 유지에 있어 큰 장애요소로 대두된다. 따라서 현실적인 공학문제를 다루기

위해서는 해석과 설계단계에서 제품의 성능에 미치는 불확실 인자들의 영향이 정량적으로 평가되어야 한다[1-8].

기존 설계방식에서는 이러한 불확실성을 설계에 반영하기 위하여 설계자의 경험과 직관에 의존한 안전계수(safety factor) 개념을 도입하였다. 그러나 상기 방식은 다양한 설계 문제에 적용하기 위해서는 많은 시행착오를 요구될 뿐 아니라, 간혹 과잉 또는 부족 설계의 결과를 초래하게 된다. 따라서 합리적이고 체계적인 설계를 위해서는 불확실 설계인자에 의해 기인되는 제품의 성능변동 특성을 정량적으로 예측할 수 있는 효율적인 통계적 확률 해석기법이 요구된다.

본 논문에서는 제작공차에 의해 발생하는 설계변수의 임의성이 제품 성능에 미치는 변동특성을 정량적으로 예측하기 위하여 단변수 차원 감소법(univariate dimension reduction

method: 이하 uDRM)을 도입하였다. 특정한 확률분포를 가정한 설계변수에 의해 발생하는 확률성능함수의 평균과 분산을 계산하였다. 또한 각 설계변수의 임의성이 성능함수의 확률분포에 미치는 영향력을 분석하기 위하여 확률성능함수의 민감도 정보를 도출하였다. 제안된 기법은 우선 간단한 수학예제에 적용하여 계산결과의 정밀도와 효율성을 몬테카를로 수치모사기법(Monte Carlo simulation method: 이하 MCS)과의 비교를 통하여 검증하였다. 검증된 기법을 유도전동기 모델에 적용하여 제작공차에 의해 나타나는 전동기의 성능변동 특성을 정량적으로 분석하였다.

## II. 확률성능함수 평가기법

확률 설계변수  $\mathbf{X}$ 를 갖는 성능함수  $h(\mathbf{X})$ 의  $k$ 번째 통계 모멘트는 아래 식과 같이 다중 적분형태로 표현된다[1, 2].

$$E(h(\mathbf{X})^k) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \{h(\mathbf{x})\}^k f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_N\}$ 는 확률 설계변수  $\mathbf{X}$ 를 구현한 값의 의미하며  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ 는  $\mathbf{X}$ 의 확률밀도함수(probability density function: 이하 PDF)를 표시한다. 확률 설계변수의 차수(dimension)가 클 경우, 현실적으로 식(1)을 해석적으로 계산하는 것은 불가능하다. 따라서 본 장에서는 식(1)을 계산하기 위해 사용되는 수치해석기법으로 uDRM과 MCS에 대해 기술한다.

### 1. 단변수 차원 감소법

uDRM의 기본 원리는 가법분해(decomposition)를 이용하여  $N$  차원의 성능함수를  $N$ 개의 1차원 함수로 변환하는데 있다[2-4]. 즉, 식(1)에 포함된 성능함수  $h(\mathbf{X})$ 를 가법분해를 통해 식(2)와 같이 근사화 한다.

$$h(\mathbf{X}) \cong \sum_{i=1}^N h(\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, x_i, \mu_{i+1}, \dots, \mu_N) - (N-1)h(\mu_1, \dots, \mu_N) \quad (2)$$

여기서  $\mu_i$ 는  $i$ 번째 설계변수에 해당하는 난수  $x_i$ 의 평균을,  $N$ 은 설계변수의 개수 즉, 차수를 의미한다. 예를 들면,  $N$ 이 2일 경우, 성능함수  $h(\mathbf{X}) = h(x_1, x_2)$ 는 식(3)과 같이 간소화됨을 확인할 수 있다.

$$h(\mathbf{X}) \cong \hat{h}(\mathbf{X}) = h(x_1, \mu_2) + h(\mu_1, x_2) - h(\mu_1, \mu_2) \quad (3)$$

여기서  $\hat{h}$ 는  $h(\mathbf{X})$ 의 근사함수를 의미한다[2].

uDRM을 이용하여 성능함수를 표현하면 식(1)의  $N$ 차원 적분이  $N$ 개의 1차원 적분으로 변환되어 성능함수에 관련된 통계 모멘트를 계산함에 있어 요구되는 계산량을 크게 줄일 수

있다. 따라서 성능함수  $h(\mathbf{X})$ 의 1차, 2차 통계 모멘트인 평균  $\mu_h$ 과 분산  $\sigma_h^2$ 는 식(4) 및 식(5)와 같이 계산된다.

$$\mu_h \cong E(h(\mathbf{X})) \cong \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \omega_i^j h(\mu_1, \dots, x_i^j, \dots, \mu_N) - (N-1)h(\mu_1, \dots, \mu_N) \quad (4)$$

$$\sigma_h^2 \cong E(h(\mathbf{X}) - \mu_h)^2 = E(h(\mathbf{X})^2) - \mu_h^2 \cong \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \omega_i^j h^2(\mu_1, \dots, x_i^j, \dots, \mu_N) - (N-1)h^2(\mu_1, \dots, \mu_N) - \mu_h^2 \quad (5)$$

여기서  $n$ 은 각 설계변수에 할당된 가중치와 구적점의 개수를,  $\omega_i^j$ 와  $x_i^j$ 는  $i$ 번째 설계변수의  $j$ 번째 가중치와 그에 해당하는 구적점을 나타낸다. 설계변수에 대한 확률분포 특성이 표준정규분포를 따른다고 가정 한다면  $n=3$ 의 경우에 사용되는 가중치와 구적점은 Table I과 같다[5].

Fig. 1은 설계변수 개수가 2일 때, 구적점의 개수가 각각 3과 5인 경우에 구적점의 위치를 2차원 평면에 도식화한 그림이다. 표준편차  $\sigma$ 를 갖는 설계변수의 평균( $\mu_1, \mu_2$ )을 중심으로 3개의 구적점일 경우  $\pm 3\sigma$  만큼, 5개의 구적점일 경우  $\pm 1.5\sigma, \pm 3\sigma$  만큼의 거리에 구적점이 위치한다. 가우스구적법의 원리에 따라  $n$  구적점을 사용한 uDRM의 계산결과는 성능함수의  $2n-1$ 차 항까지 정밀도가 보장된다. 또한  $n$  구적점을 갖는  $N$  설계변수에 대한 식(1)의 직접 적분을 수행할 경우,  $n^N$ 번의 함수계산이 요구되지만 uDRM을 적용 시에는  $n \times N + 1$ 번 계산만이 수행되므로 수치계산의 효율성이 높다.

한편, 성능함수의 강건성을 평가하기 위해서는 각 설계변수의 임의성에 대한 통계 모멘트의 변동량을 예측해야 한다. 확률 설계변수를 구성하는 성분들이 서로 독립이라고 가정하면

Table I. Weight and quadrature points for a standard normal PDF.

Quadrature points			Weights		
$x^1$	$x^2$	$x^3$	$\omega^1$	$\omega^2$	$\omega^3$
$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	1/6	4/6	1/6

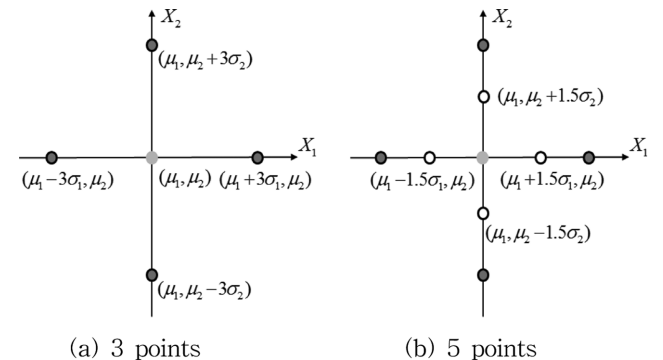


Fig. 1. Locations of quadrature points.

성능함수의 1차 미분정보인 민감도는 다음 식과 같이 계산된다[6, 7].

$$\partial\mu_h/\partial\mu_k \cong \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \omega_i^j (\partial h/\partial x_k) \Big|_{\mathbf{x}=(\mu_1, \dots, x_p^j, \dots, \mu_N)} - (N-1)(\partial h/\partial x_k) \Big|_{\mathbf{x}=\mu} \quad (6)$$

$$\partial\sigma_h^2/\partial\mu_k \cong \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \omega_i^j (\partial h^2/\partial x_k) \Big|_{\mathbf{x}=(\mu_1, \dots, x_p^j, \dots, \mu_N)} - (N-1)(\partial h^2/\partial x_k) \Big|_{\mathbf{x}=\mu} - \partial\mu_h^2/\partial\mu_k \quad (7)$$

여기서  $\mu_k$ 는  $k$ 번째 설계변수의 평균값을 의미한다.

### 2. 몬테카를로 수치 모사기법

MCS는 설계변수에 난수를 발생시켜 충분히 많은 수의 무작위 실험 데이터를 통하여 성능함수의 통계 모멘트를 근사적으로 구하는 방법이다. 따라서 계산결과와 정밀도를 보장하기 위해서 일반적으로 수십~수백만 개에 해당하는 실험점을 요구하므로 수치계산 측면에서는 매우 비효율적인 방식이다. 그러나 계산결과와 정밀도가 다른 수치근사기법에 비해 매우 우수하므로 일반적으로 MCS결과를 기준으로 기타 수치기법의 정밀도를 평가한다.

MCS에 의해 확률 설계변수  $\mathbf{X}$ 에 의해 표현되는 성능함수  $h(\mathbf{X})$ 의 평균과 분산은 아래 식과 같이 정의된다[1, 8].

$$\mu_h = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M h(\mathbf{x}^i) \quad (8)$$

$$\sigma_h^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (h(\mathbf{x}^i) - \mu_h)^2 \quad (9)$$

여기서  $M$ 은 난수의 크기를  $\mathbf{x}$ 는 난수에 의해 생성된  $i$ 번째 실험점을 의미한다. 한편, 설계변수의 변동에 대한 성능함수의 평균과 분산의 변화량은 다음과 같이 계산된다.

$$\partial\mu_h/\partial\mu_k \cong \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{\partial h}{\partial x_k} \quad (10)$$

$$\partial\sigma_h^2/\partial\mu_k \cong \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M 2(h(\mathbf{x}^i) - \mu_h) \frac{\partial h}{\partial x_k} \quad (11)$$

### III. 적용 사례

우선 정밀해(exact solution)를 갖는 간단한 수학예제를 통하여 제안된 uDRM과 MCS의 계산 정밀도와 효율성을 비교하였다. 또한, uDRM을 유도전동기 모델에 적용하여 제작공

Table II. First and second moment of Eq. (12).

	$\mu_h$	$\sigma_h^2$	Function call
Exact solution	-5.5	8.31	-
MCS	-5.5	8.3	200,000
uDRM	-5.49	8	7

Table III. Sensitivity of mean and variance of Eq. (12).

	$\partial\mu_h/\partial\mu_1$	$\partial\mu_h/\partial\mu_2$	$\partial\sigma_h^2/\partial\mu_1$	$\partial\sigma_h^2/\partial\mu_2$	Function call
Exact solution	-2.5	-1.3	3.9	2.55	
MCS	-2.5	-1.3	3.89	2.54	200,000
uDRM	-2.5	-1.25	3.8	2.5	7

차에 의해 발생하는 전동기 성능변동 특성을 정량적으로 분석하였다.

#### 1. 수학예제

확률변수  $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$ 를 갖는 성능함수는 식(12)와 같이 정의된다.

$$h(\mathbf{X}) = 1 - \frac{x_1^2 x_2}{20} \quad (12)$$

여기서 확률변수는 2차원 평면에서 평균값(5, 5)에서 각각  $N(5, 1)$ 의 정규분포 특성을 갖는다고 가정한다. Table II는 통계 모멘트를 계산하는 두 가지 수치근사 기법에 의해 식(12)에서 제시된 성능함수의 평균과 분산을 계산한 결과이다. 계산 결과의 정밀도는 MCS가 uDRM에 비해 평균과 분산이 정밀해에 근접한 결과를 보이나 그 차이는 각각 0.2%와 3.6%에 불과하다. 그러나 MCS의 경우 성능함수의 평균과 분산을 계산하는데 요구되는 함수 계산 횟수는 200,000번인 반면 3개의 구적점을 사용한 제안된 uDRM은 7번의 함수 호출만을 요구한다.

통계 모멘트의 수치근사 기법들 간의 확률 설계변수의 변동에 의해 나타나는 성능함수의 평균과 분산의 변화량 비교는 Table III에 제시하였다. 분석결과 확률변수의 첫 번째 인자인  $\mu_1 = \mu(x_1)$ 이  $\mu_2 = \mu(x_2)$ 에 비해 성능함수의 평균과 분산의 변동에 큰 영향을 주고 있음을 확인하였다. 두 가지 수치근사 기법을 비교한 결과 제안한 uDRM이 정밀해를 기준으로 96% 이상의 해의 정확도를 유지하면서 계산 효율성 측면에서 MCS에 비해 매우 우수함을 검증하였다.

#### 2. 유도 전동기 모델

Fig. 2는 340 kW, 4극, 6,900 V, 60 Hz의 산업용 농형 유도 전동기의 단면을 도식화한 그림이다. 고정자 권선은 공극의 공간 고조파 지속성분을 줄이기 위하여 48 슬롯에 분포 단절권을 채택하였다[9, 10].

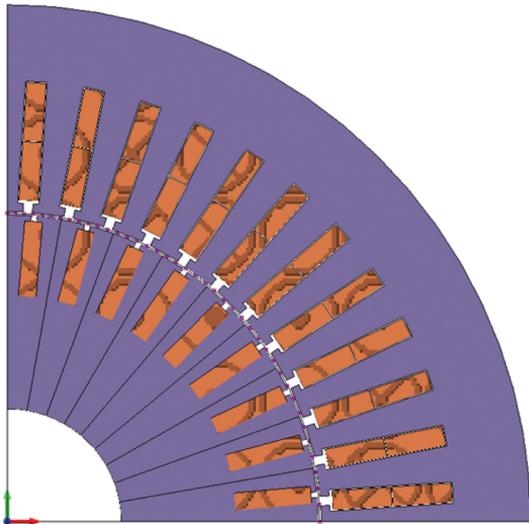


Fig. 2. (Color online) A quarter model of a 340 kW and 4 pole induction motor.

실제 양산되는 전동기는 제작과정에서 발생하는 제작공차에 의해 전동기 성능에 변동이 발생하게 된다. 따라서 양산 전동기의 성능에 대한 품질 관리를 위해서는 설계단계에서 제작공차에 기인한 성능변동 특성을 정량적으로 분석하여 집중 관리가 요구되는 설계인자의 선별과정이 선행되어야 한다. 본 논문에서는 5개의 구적점을 사용하는 uDRM 기법을 적용하여 제작공차에 의해 발생하는 유도 전동기의 정격토크를 성능함수로 정의하여 변동특성을 예측하였다.

Fig. 3과 같이 회전자봉(rotor bar)과 관련된 개구부 폭( $x_1$ ), 공극 길이( $x_2$ ), 봉 길이( $x_3$ ), 봉 폭( $x_4$ ) 및 개구부 깊이( $x_5$ )의

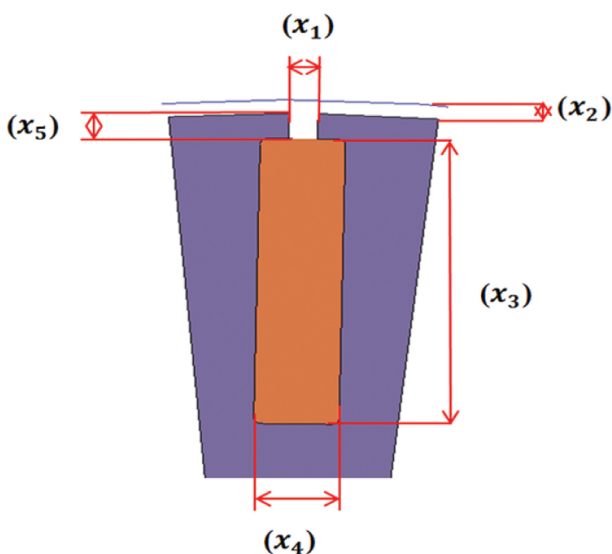


Fig. 3. (Color online) Five probabilistic design variable relating to a rotor bar.

Table IV. Mean, variance and their sensitivity of rated torque.

	$\mu_i$	$\mu_h$	$\sigma_h^2$	$\partial\mu_h/\partial\mu_i$	$\partial\sigma_h^2/\partial\mu_i$
$x_1$	3,865			143	-2,306
$x_2$	3,884			245	-34,119
$x_3$	3,903	3891.2	137.4	-4	1,928
$x_4$	3,906			-193	-69,356
$x_5$	3,897			-169	1,249

5개 설계변수를 제작공차를 고려한 확률변수로 지정하였다. 이때 제작공차는 0.1로 가정하고 슬립 0.01에서 상용 전자장 해석도구인 MagNet을 사용하여 정격토크를 계산하였다[11].

Table IV는 확률 설계변수의 평균값을 기준으로 26회의 유한요소해석을 통해 얻어진 제작공차에 의해 발생하는 정격토크의 평균, 분산 및 민감도 결과를 제시한다. 정격토크의 평균값은  $x_2$ 와  $x_4$ 의 제작공차에 의한 변동이 가장 크게 발생한다. 반면, 정격토크의 분산, 즉 평균값을 기준으로 한 변동은  $x_4$ 의 제작공차에 의해 가장 큰 영향을 받고 있다. 따라서 유도 전동기의 정격토크의 변동을 최소화하기 위해서는 회전자봉의 길이와 공극 길이에 관련된 제작공차를 집중적으로 관리할 필요가 있음을 시사한다.

#### IV. 결 론

본 논문에서는 단변수 차원 감소법을 도입하여 제작과정에서 발생할 수 있는 설계인자의 공차에 기인한 성능함수의 확률 분포특성을 예측하였다. 또한 적용사례를 통해 제안된 기법의 수치적인 효율성과 정밀도를 검증하였다. 본 연구결과는 성능에 관련한 통계 모멘트의 민감도 정보를 활용하여 기기 성능의 품질향상을 위한 설계변수의 개별적인 공차관리가 가능함을 제시한다.

#### 감사의 글

이 논문은 2014년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. 2014R1A1A4A01008767).

#### References

[1] D. Kim, Ph. D. Thesis, Kyungpook National University, Korea (2014).  
 [2] B. Ju, Ph. D. Thesis, Korea Advanced Institute of Science and Technology, Korea (2008).  
 [3] S. Rahman and H. Xu, Probab. Eng. Mech. **19**, 393 (2004).  
 [4] I. Lee, K. Choi, and L. Do, David Gorsich, IEEE Trans. Magn. **86**, 1550 (2008).

- [5] S. Lee and W. Chen, Struct Multidisc Optim. **37**, 239 (2009).
- [6] S. H. Lee and B. M. Kwak, Struct. Multidisc. Optim. **39**, 227 (2009).
- [7] D. Kim, N. Choi, C. Lee, and D.-H. Kim, IEEE Trans. Magn. **51**, 3 (2015).
- [8] A. Haldar and S. Mahadevan, Probability, Reliability, and Statistical Method in Engineering Design, Jogn Wiley & Sons, Now York (2000).
- [9] K. J. Park, D. H. Koo, and J. Lee, Int. Conf. ICEMS 61 (2008).
- [10] A. E. Fitzgerald, C. Kingsley Jr., and S. D. Umans, Electric Machinery, McGraw-Hill, Now York (2003).
- [11] MagNet User's Manual, Infolytica Corporation, Quebec, Canada (2008).